# Serie 1

**1.** Eine *Metrik* auf einer Menge $E$ ist eine Funktion

$$d \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden drei Eigenschaften:

(i) Für alle $x, y \in E$ gilt $d(x, y) \geq 0$, mit Gleichheit dann und nur dann wenn $x = y$.

(ii) Für alle $x, y \in E$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) Für alle $x, y, z \in E$ gilt die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Wir sagen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ *konvergiert* gegen $x \in E$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so, dass für alle $n \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Wir bezeichnen $x$ in diesem Fall als *Grenzwert* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Zeigen Sie, dass wenn der Grenzwert einer Folge in einem metrischen Raum existiert, so ist er eindeutig.

b) Geben Sie einen metrischen Raum $(E, d)$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ an, welche keinen Grenzwert besitzt.

**2.** Es seien $d_1, d_2$ zwei Metriken auf einer Menge $E$. $d_1, d_2$ heissen *äquivalent* wenn es Konstanten $C, C' > 0$ gibt mit

$$\forall x, y \in E: \quad C d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C' d_1(x, y).$$

Gegeben eine Metrik $d$ auf $E$, so heisst

$$\mathcal{T}_d := \{O \subset E \mid \forall x \in O \, \exists r > 0 : B_d(x, r) \subset O\}$$

die *durch die Metrik $d$ induzierte Topologie*. (Hier ist $B_d(x, r) := \{y \in E : d(y, x) < r\}$ die offene Kugel über $x \in E$ mit Radius $r > 0$.)

a) Zeige dass

$$\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \, \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad B_{d_2}(x, \delta) \subset B_{d_1}(x, \epsilon).$$

b) Wenn $d_1 \leq C d_2$ für ein $C > 0$, dann gilt $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

c) Wenn $d_1, d_2$ äquivalent sind, dann gilt $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

d) Wenn $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$ dann gilt: Jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ welche bezüglich $d_2$ gegen $x \in E$ konvergiert, konvergiert auch bezüglich $d_1$ gegen $x$.

e) Wenn $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$, dann konvergiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ genau dann bezüglich $d_2$ gegen $x \in E$ wenn sie bezüglich $d_1$ gegen $x$ konvergiert.

**3.** Sei $E$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine Norm auf $E$ ist eine Funktion $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ so dass

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecks-Ungleichung),

(iii) Für alle $x \in E$, $\|x\| = 0$ impliziert $x = 0$.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf $E$ heissen *äquivalent* falls Konstanten $C, C' > 0$ existieren so dass

$$C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C'\|x\|_1 \qquad (x \in E).$$

Wenn $\|\cdot\|$ eine Norm auf $E$ ist, so definiert

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in E)$$

eine Metrik, die *Norm-induzierte* Metrik. Beachte dass jede Norm $\|\cdot\|$ bezüglich ihrer induzierten Metrik $d$ auf $E$ (Lipschitz) stetig ist, denn

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| = d(x, y) \qquad (x, y \in E).$$

Weiter sind die von zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ induzierten Metriken $d_1$ und $d_2$ äquivalent.

Zeige: Auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $E$ sind alle Normen – und damit alle Norm-induzierten Metriken – äquivalent.

**4.** Für $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ definiere

$$d_2(x,y) := \left( \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \qquad (x, y \in \mathbb{R}^d).$$

$d_2$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}^d$. Wir nennen sie *euklidische Metrik* oder auch *Standardmetrik*.

a) $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ bezeichne den Ursprung. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die *Post Office Metrik* durch

$$d_P(x,y) = \begin{cases} d_2(x,0) + d_2(0,y) & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $d_P$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

b,c) Betrachte die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch

b) $x_n = (1/n, 1/n)$,

c) $x_n = (1/n, 1)$.

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $d_2$ auf $\mathbb{R}^2$. Was lässt sich über die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Metrik $d_P$ aus Teilaufgabe a) sagen?

**5.** Sei $C([0,1])$ die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ (mit dem üblichen Stetigkeitsbegriff). Definiere auf diesem Funktionenraum

$$D(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

und

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Prüfe, dass $D$ und $d_1$ Metriken auf $C([0,1])$ sind. Gib ein Beispiel einer Folge in $C([0,1])$ welche bezüglich der Metrik $d_1$ gegen die Nullfunktion konvergiert, bezüglich der Metrik $D$ jedoch nicht.

**6.** a) Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum. Zeige dass $d' : E \times E \to [0, 1]$, definiert durch

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \qquad (x, y \in E),$$

eine Metrik auf $E$ ist, und dass

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}.$$

Zeige dass wenn $d$ beliebig grosse Werte annehmen kann, dann sind $d$ und $d'$ *nicht* äquivalent.

b) Sei $X$ eine Menge und $B(X, \mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten Funktionen $X \to \mathbb{R}$, d.h.

$$B(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}.$$

Beobachte dass

$$\|f\|_{\mathrm{glm}} := \sup_{x \in X} |f(x)| \quad \text{bzw.} \quad d_{\mathrm{glm}}(f, g) := \|f - g\|_{\mathrm{glm}}$$

eine Norm bzw. Metrik auf $B(X, \mathbb{R})$ definiert. Erinnerung: Schreibe $\mathbb{R}^X$ für die Menge aller Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ *konvergiert gleichmässig* gegen $f \in \mathbb{R}^X$ (genau dann) wenn

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \; [n > N \Rightarrow \forall x \in X : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon] \, .$$

Wir bemerken dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ genau dann gleichmässig gegen $f \in \mathbb{R}^X$ konvergiert wenn $d_{\mathrm{glm}}(f, f_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

Frage: Existiert eine Metrik $d$ auf $\mathbb{R}^X$ – nicht nur auf der Teilmenge $B(X, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^X$ – mit den folgenden zwei Eigenschaften?

- Konvergenz bezüglich der Metrik $d$ ist gleichmässige Konvergenz,
- die durch die Metriken $d_{\mathrm{glm}}$ und $d | B(X, \mathbb{R}) \times B(X, \mathbb{R})$ induzierten Topologien stimmen überein.